www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

I. S. C. I. D. Régime économique CONCOURS A 1989

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

PROBLEME 1

1°) Soit f, la fonction numérique d'une variable réelle telle que : $f(x) = -\ln\left(\frac{1}{x} - 1\right)$

a. Etudier la variation et tracer la courbe représentative *(C)* de f dans un repère orthonormé (unité : 2 cm). On montrera que le point de coordonnées (1/2,0) est centre de symétrie.

b. Montrer que f définit une application bijective, pour laquelle on précisera les ensembles de départ et d'arrivée, et déterminer sa réciproque g, dont on tracera la courbe représentative sur le même graphique que *(C)*.

c. Montrer que, dans $\mathbb{R}$, l'équation : $x = g(x)$

admet une unique solution α.

2°) On définit la suite numérique u par : $\begin{cases} u_0 = 1/2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$

a. Déduire de 1°) b. que la suite u est croissante et majorée. Conclure.

b. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$$

c. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

d. Calculer une valeur approchée à 10^{-6} près de α, en indiquant l'algorithme utilisé (soit par le programme de calcul en langage BASIC, soit par un organigramme).

PROBLEME 2

Dans ce problème, $x \longmapsto [x]$ désigne la fonction partie entière des nombres réels.

1°) Soient $p \in]0,1[$ et f, la fonction numérique d'une variable réelle telle que : $f(x) = [x + p]$

Etudier la variation de f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé (unité : 3 cm).

2°) Soient U, une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1[$, et $X = [U + p]$, où $p \in]0,1[$. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X.

3°) Soient $(U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots)$ et $(V_1, V_2, \ldots, V_n, \ldots)$ deux suites indépendantes de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0,1[$.

Posons : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = \left[U_n + \frac{1}{2}\right]$ et $Y_n = \left[V_n + \frac{1}{6}\right]$

a. Montrer que la variable aléatoire Z_n, définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$Z_n = 1 - (1 - X_n)(1 - Y_n)$$

est une variable aléatoire de Bernoulli, dont on calculera le paramètre. En préciser l'espérance et la variance.

b. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de : $S_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k$

c. Décrire une épreuve aléatoire concrète réalisant le modèle mathématique présenté dans le 3°).

T. S.V. P.

PROBLEME 3

On considère la matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels :

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

et les vecteurs-colonnes suivants :

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad K_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad K_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1°) Verifier que :

* $$A(K_1 + K_2) = K_1 + K_2$$
$$A(K_1 - K_2) = K_1 - K_2$$
$$A K_3 = K_3$$

2°) Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les trois valeurs propres de A trouvées au 1°). Vérifier que :

$$(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I)(A - \lambda_3 I) = 0$$

3°) En développant l'égalité précédente, et en la transformant, montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

4°) Soit P le polynôme réel défini par : $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$. Pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 3, on sait qu'existent a_n, b_n, c_n, réels, et Q_n, un polynôme réel, uniques, tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^n = Q_n(x).P(x) + a_n x^2 + b_n x + c_n$$

a. En affectant à x successivement trois valeurs réelles judicieusement choisies, déterminer un système de trois équations linéaires à 3 inconnues dont a_n, b_n et c_n sont les solutions. En déduire leurs valeurs respectives.

b. Ayant remarqué que $A^3 - 2A^2 - A + 2I = 0$, pour tout entier naturel n, déduire du a. l'expression de A^n en fonction de A^2, A et I, puis expliciter A^n.

* erreur :

$$A(K_1 + K_2) = -(K_1 + K_2)$$
$$A(K_1 - K_2) = 2(K_1 - K_2)$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail